BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 39.35.51

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

М.Р.ТАГИЕВ
Бакинский Государственный Университет
tagiemr@hotmail.com

В данной статье обосновывается нелинейная парадигма развития современной экономики, а также обосновывается хаос. Затем проводится сравнительный анализ теории детерминированного хаоса и теории катастроф. Основным постулатом теории детерминированного хаоса является чувствительность к начальным условиям. Малейшая ошибка начальных условий приводит к экспоненциальному разбеганию (разлету) траектории развития. Дается формула расчета скорости разбегания траектории. Обобщая исследования классиков нелинейной динамики обсуждается понятие «память ряда» и методика расчета постоянной Херста как показателя персистентности ряда. В конце статьи исследуются вопросы неустойчивой волотильности.

Ключевые слова: динамический хаос, детерминированный хаос, фракталы, постоянная Херста.

Фрактальный анализ временных рядов

Анализ причин и последствий последних экономических и финансовых кризисов показал, что их внезапность и непрогнозируемость в первую очередь связана с устаревшими научными подходами к прогнозированию социально-экономического развития. Методологическая ошибка этих научных прогнозов заключается в том, что в условиях экономической глобализации нельзя рассматривать экономику отрасли и, даже экономику страны, как замкнутую систему. Изучение влияния внешних факторов на экономику должно рассматриваться как элемент экономической системы. Отсюда следует и неадекватность линейных математических моделей, которые не учитывают влияния внешних факторов и, как следствие, не могут описать внезапные колебания поведения рынков, происхождение кумулятивных процессов в экономике и т.д. Использование методов нелинейной динамики в экономике сблизило также такие науки как экономика и физика. Схожесть методов анализа таких явлений как турбулентность, устойчивость, кумулятивность, колебания и т.д. привело к проблеме корректности междисциплинарного подхода, который на наш взгляд, являются темой особых дискуссий и подробно изложены в [1].

Теория детерминированного хаоса

Наиболее распространенным направлением нелинейной динамики в экономических исследованиях является теория хаоса. Эта теория раскрывает сущность глубинных экономических процессов. В середине прошлого века в Советском Союзе вообще и в Азербайджане в частности, получила развитие математическая теория катастроф, которая, будучи одним из направлений нелинейной динамики, описывала масштабные скачки (разрывы, катастрофы, терминология зависит от поставленной задачи). Теория хаоса, в отличие от теории катастроф, описывает маломасштабные процессы с более редкими скачками и позволяет не только описывать, но и прогнозировать, а иногда и управлять хаотическими процессами. Обе эти теории объединяет более объемное направление - это теория бифуркаций. Любые внезапные скачки происходят в точках бифуркаций, по мнению Г.Хакена, которое было описано в [2], оба типа скачка связаны между собой. Малые скачки возбуждают большие вблизи точек бифуркаций, на которых происходит катастрофа. Таким образом, хаос может возникнуть из катастрофы и наоборот, катастрофа может возникнуть из хаоса.

Важным моментом использования методов динамического хаоса являются детерминированности природы хаоса. Непредсказуемость поведения таких систем не означает наличие источников случайных флуктуации, а должно пониматься как чувствительность к начальным условиям.

Малейшая ошибка начальных условий приводит к экспоненциальному разбеганию траектории развития системы. Хотелось бы отметить, что в экономических системах, используя методы детерминированного хаоса, нельзя исключать наличие стохастических вкраплений в детерминированные процессы. Например, любой экономически детерминированный процесс, который анализируется с элементами фондовых индексов, имеет случайные составляющие.

Скорость разбегания траектории можно однозначно определить, вычислив значение наибольшего показателя Ляпунова. Если через d_0 обозначить начальное расстояние между двумя точками. Через некоторое время t - это расстояние $d(t) = d_0 \times 2^{\lambda t}$, где λ – показатель Ляпунова (цепная формула).

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{t}\right) \log_2 \frac{d(t)}{d(0)}$$

Здесь норма d (t) = [(t)] определяет меру разбегания двух соседних траекторий.

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_o}\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{d(t_k)}{d_0(t_k-1)_2}$$

Если λ > 0 – хаотическое движение, то λ ≤ 0 – регулярное движение.

Кроме него, для определения количественной меры хаоса, используют также такие параметры как энтропия Колмогорова, как параметр количества информации на аттракторе и спектральную плотность мощности, определяемого методами спектрального анализа.

Для количественной оценки хаоса также можно воспользоваться геометрическими методами, которые заключаются в использовании критерий, определяемых, через фрактальную и корреляционную размерность.

Пионером в области фрактальной геометрии является Мандельброт, который обобщил разрозненные исследования К.Вейшотрасса и Д.Пеанно. Результатами этих обобщений является выделение в отдельный класс объектов, которые невозможно описать при помощи классической геометрии из-за нечеткости и быстрых изменений контуров (евклидовой геометрии). Классическими примерами являются геометрия горных массивов, береговых линий, облаков и т.д. Все эти объекты строятся вокруг некоторой притягивающей области для соседних траекторий и имеют необычные геометрические структуры. Называются эти аттракторы «странными».

Все траектории внутри странного аттрактора неустойчивы во времени и имеют сильную расходимость уже с самого начала своей траектории движения. Вообще аттракторы характеризуются своей размерностью, то есть количеством информации для задания координаты произвольной точки внутри аттрактора.

В работах Д.Рюэля и Ф.Токенс [6] определения размерности аттрактора имеют несколько методов. Самый распространенный метод основывается на распределении множества равномерно распределенных точек по одной линии N_o и покрытии этого множества минимальным числом кубов с ребром *ε*. Если значение N_o, то количество кубов зависит от количества ребер *ε* соотношением $N(\varepsilon) = {}^{1}/_{\varepsilon^D}$. В общем виде эта формула для плоскости имеет вид $N(\varepsilon) = {}^{1}/_{\varepsilon^D}$, где *D* - размерность конкретного множества. Физический смысл параметра *D* — это скорость роста числа ячеек покрытия данного множества при уменьшении размера ячеек. Устремим количество кубов *(ε)* к нулю

$$D = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Если *D* окажется дробной, то такое множество называется дробным или фрактальным, что в переводе с английского означает «дробь».

Свойство самоподобия, из которого следует определение фрактальной размерности, как меры покрытия аттрактора в фазовом пространстве, с показателями частоты посещения соответствующей траектории элемента покрытия.

Хотелось бы обратить внимание на то, что «странные» аттракторы пространственно неоднородны, то есть, не все области аттрактора посещаются с одинаковой частотой. Данная размерность относится к стохастическим типам.

Постоянная Херста

Одним из наиболее удобных методов нелинейной динамики, используемых для анализа экономических временных рядов, является алгоритм Х.Е.Херста [7].

Дадим ряд с N общим числом наблюдений

$A = \{a^i\}, i= 1,2, \dots , N$

Выберем произвольный временной промежуток $T = z$ и цикл по $k = 1$ до $N - n$. При $k = 1$ выберем первые n наблюдений $a_1, a_2, \dots, a_n$и вычислим среднее M_{1n}. Временной ряд накопленных отклонений определяется как

$$X_{1n} = \sum_{i+2}^{m+1} (\alpha_i - M_{1n}), m < n$$

Затем, при $k = 2$ выбираем серию наблюдений $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$. Как и вышеприведенной формуле вычисляем среднее M_{2n} и X_{2n}

$$X_{2n} = \sum_{i+2}^{m+1} (\alpha_i - M_{2n})$$

Аналогично, получив X_{km},, вычисляем размах последовательности ряда отклонений X_{km} как $R_n = max(X_{km}) — min(X_{km})$.

Для удобства перейдем к безразмерным величинам, разделив этот размах на стандартное отклонение исходных наблюдений.

Если через Z обозначим выборочное стандартное отклонение ряда $\{y_i\}$ $i= 1,2,\dots, N$, то разделив R_nна Z, получим безразмерную величину R_n/Z, которая будет тем больше, чем больше будет временной промежуток $T = n$. Согласно Херсту, $R/Z = (an)^H$, где n - число наблюдений, a — $const$, H - показатель Херста. Прологарифмировав последнее выражение, получим $ln(R/Z) = Hlnn + lna$. Согласно источникам литературы, посвященным данной проблеме, на следующим этапе строится график: по оси абсцисс откладывают значения $\ln n$, а по оси ординат - $\ln(R/Z)$.

Используя метод наименьших квадратов, строят линейную регрессию. Наклон линии должен совпасть со значением постоянной Херста. Использование постоянной Херста удобно, когда необходимо определить, как настоящее влияет на будущее или как еще говорят, «память» ряда (мера персистентности, склонность к тренду и т.д.).

Данная постоянная колеблется между значениями 0 и 1. Экспериментально доказано, что если H = 0,5, то временной ряд состоит из независимых событий (некоррелированных). Такой ряд имеет наименьшую степень прогнозируемости (броуновское движение). Его называют «белый шум». Другими словами, «белый шум» - это наложение бесконечного числа колебаний. Коэффициент корреляции определяют по формуле С = $2H\text{-}1$.

Временной ряд, в котором значение H колеблется между 0 и 0,5, является антиперсистентным. То есть, если этот ряд возрастает, то в будущем он будет убывать. Верно и обратное утверждение. Такой ряд классифицируется как «розовый шум».

Чем ближе постоянная Херста к 1, тем долгосрочнее память ряда. Такой ряд является трендоустойчивым. Если 0,5 $<H<$1, то его называют «черным шумом».

Итак, если показатель Херста Н = 0,5, то каждое последующее состояние не зависит от предыдущего, то есть вся информация уже обесценена. Если $H>0{,}5$, то сегодняшняя информация будет учитываться рынком в течение некоторого времени, то есть на лицо информационное влияние прошлого на настоящее. Этот показатель иногда называют функцией долговременной памяти.

Неустойчивая волатильность

Анализ мировых экономических кризисов 1992, 1998, 2008 годов показал, что традиционное утверждение о нормальности распределения динамики финансовых рынков не оправдывает себя. Если принять падение индексов в США 1987 года на 30% за кризис, то следующий кризис должен наступить через несколько тысяч лет. В реальности мировая экономика ещё не оправилась от кризиса 2008 года. Сомнение по поводу нормальности распределения динамики финансовых рынков ставит под большой вопрос Марковицкую модель оптимального портфеля и модель Шарпа.

По нашему мнению эти модели можно использовать только для краткосрочного прогноза и анализа финансовых рынков, так как на небольшом участке траектории поведение финансовых рынков соответствует случайному образу. В долгосрочной же перспективе, цены на акции колеблются вне зависимости от случайных факторов (слухов, бумов). Они зависят от фундаментальных факторов, таких как деловая активность рынков, тенденции изменения макроэкономических показателей. В этом случае задача упрощается и решается методами теории детерминированного хаоса. По Мандельброту, кривая динамики рыночных котировок описывается графиком похожим на «колокол», но только с утолщенными хвостами, которые указывают на большую вероятность возникновения событий по краям «колокола» и не всегда конечную дисперсию, а это уже некий степенной закон распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиев М.Р. Сравнительный анализ физических и экономических систем. Ежегодник системные исследования. М., 2009, с.82-90.
2. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. Перевод с английского языка. М.: Мир, 1985, 220 с.
3. Тагиев М.Р. Известия ААН Азербайджана, серия Экономика, № 4, с. 14-17, 2005.
4. Герман В.А. Институт радиотехники и электроники РАН Москва Эффекты детерминированного хаоса.
5. Mandelbrot B. The Variation of Certain Speculative Prices. Cambridge. MIT Press. 1964, 315 с.
6. Ruelle D. Tokens F. On the nature of turbulence, опубликованные в 1971 году. 290 с.
7. Hurst H.E. Long-term storage of reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers.

MÜVƏQQƏTİ SIRALARIN FRAKTAL ANALİZİ

M.R.TAĞIYEV

XÜLASƏ

Bu məqalədə müasir iqtisadiyyatın qeyri-xətti inkişafı təsdiq edilir. Bu səpkidə determinik xaos və "katastrof nəzəriyyəsinin" iqtisadiyyata tətbiqində mövcud olan fərqlər göstərilir. Bundan əlavə statistik sıraların bəzi xüsusiyyətləri öyrənilir.

Açar sözlər: dinamik xaos, determinik xaos, fraktallar, Herst sabiti

FRACTAL ANALYSIS OF TIME SERIES

M.R.TAGHIYEV

SUMMARY

This article explains the non-linear paradigm of modern economic development, as well as justifies the chaos. Then, a comparative analysis of the theory of deterministic chaos and catastrophe theory is described. The main postulate of the theory of deterministic chaos is sensitivity to initial conditions. The slightest error of initial conditions leads to exponential divergence (dispersion) of development trajectory. The formula for calculating the rate of divergence of trajectories is given. Summarizing the study of the classics of the non-linear dynamics, the concept of the "line memory" and the method of calculation of the Hurst constant as an indicator of the persistence of the series is discussed. In the end, the article explores the issues of erratic volatility.

Key words: dynamic chaos, deterministic chaos, fractal, Hurst coefficient.

Поступила в редакцию: 08.05.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.